www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ESSEC
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

MATHEMATIQUES I

Option économique

Vendredi 11 mai 1990 de 14h à 18h

Les deux exercices sont indépendants et peuvent être abordés dans un ordre arbitraire.

EXERCICE I: Probabilités.

On désigne par m, n, k des entiers naturels et par p un réel tel que $0 < p < 1$.
Une urne contient des boules blanches et noires, et la probabilité d'en tirer une boule blanche (respectivement noire) est p (respectivement $q = 1 - p$).
On effectue alors une suite de tirages successifs "au hasard" et "avec remise" (toute boule tirée de l'urne y est replaçée avant de procéder au tirage suivant).
On définit les événements suivants:
- B_k est réalisé si et seulement si m+k+1 tirages sont nécessaires à l'obtention de m+1 boules blanches (ce qui signifie donc que m boules blanches sont obtenues lors des m+k premiers tirages, une (m+1)° boule blanche étant obtenue au (m+k+1)° tirage).
- N_k est réalisé si et seulement si n+k+1 tirages sont nécessaires à l'obtention de n+1 boules noires (ce qui signifie donc que n boules noires sont obtenues lors des n+k premiers tirages, une (n+1)° boule noire étant obtenue au (n+k+1)° tirage).

1°) a) Calculer les probabilités $P(B_k)$ et $P(N_k)$.
b) Montrer que la famille $(B_0, B_1, ..., B_n, N_0, N_1, ..., N_m)$ constitue un système complet d'événements.
c) Déduire des résultats précédents que:

$$(1) \qquad p^{m+1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^{m} q^k\right) + q^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n} p^k\right) = 1.$$

2°) a) Etudier le sens de variation de la suite (s_m) définie par: $s_m = \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n} p^k$.

Donner à l'aide de la relation (1) un majorant de s_m ne dépendant pas de m. Etablir alors la convergence de la suite (s_m).

b) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Donner un équivalent de: C_{m+k}^{m}

lorsque m tend vers l'infini, et en déduire la valeur de la limite suivante: $\lim_{m \to +\infty} p^{m+1} C_{m+k}^{m} q^k$.

c) Déduire des résultats précédents que: $\lim_{m \to +\infty} s_m = \frac{1}{q^{n+1}}$.

3°) On note X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenant la valeur k si et seulement si l'événement N_k est réalisé.
a) Vérifier que X est bien une variable aléatoire.
b) Vérifier la formule suivante pour $k \geq 1$: $k C_{n+k}^{n} = (n+1) C_{n+k}^{n+1}$.

En déduire que X admet une espérance mathématique que l'on déterminera.
c) De façon analogue, déterminer l'espérance de X(X-1) et en déduire la variance de X.

.../...

4°) On suppose que $n \geq 1$ et l'on note Y_{n+1} la variable aléatoire prenant la valeur k si et seulement si c'est au $(n+k+1)^{\circ}$ tirage que, pour la première fois, sont obtenues n+1 boules de la même couleur.

a) Préciser quelles sont les valeurs prises par Y_{n+1} et calculer $P([Y_{n+1} = k])$.

b) Démontrer que l'espérance mathématique de Y_{n+1} est donnée par la formule suivante (on en déduira $E(Y_2)$):

$$E(Y_{n+1}) = (n+1)pq \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1+k}^{n+1} (pq)^k \left(p^{n-k} + q^{n-k}\right).$$

c) On pose pour tout entier naturel k: $u_k = p^k + q^k$.

Que valent u_0? u_1? Vérifier que, pour $k \geq 2$: $u_k = u_{k-1} - pq\, u_{k-2}$.

d) En utilisant la formule précédente, puis la formule du triangle de Pascal, établir que, pour $n \geq 2$:

$$\frac{E(Y_{n+1})}{n+1} - \frac{E(Y_n)}{n} = C_{2n}^{n-1} \frac{(pq)^n}{n}.$$

En déduire une nouvelle expression de $E(Y_{n+1})$.

5°) Les notations sont celles de la question précédente, et on suppose $p \neq 1/2$.

a) Montrer que $4pq < 1$.

b) Montrer que $a_{k+1} \leq 4a_k$, où a_k est défini pour $k \geq 1$ par: $a_k = \frac{1}{k} C_{2k}^{k-1}$.

c) En déduire que la suite $(E(Y_{n+1}) / (n+1))$ est convergente et donner un majorant de sa limite.

EXERCICE II: Analyse.

L'objet de cet exercice est l'étude d'approximations de $x \to \ln(1+x)$ par des fonctions affines $x \to ax + b$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$.

Dans la suite, on considère pour tout réel a la fonction de I dans R définie par:

$$f_a(x) = \ln(1+x) - ax.$$

A] On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale:

$$N_1(a, b) = \int_0^1 (\ln(1+x) - ax - b)^2 dx.$$

1°) a) Etant donnés deux réels B et C, on demande de déterminer le minimum de l'expression suivante lorsque x décrit R, ainsi que la valeur de la variable x qui réalise ce minimum:

$$x^2 - 2Bx + C.$$

b) Etant donnée une application continue $g: I \to R$, en déduire le minimum de l'expression suivante lorsque b décrit R, ainsi que la valeur de la variable b qui réalise ce minimum:

$$\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx.$$

2°) Calculer les trois intégrales suivantes:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx \quad ; \quad \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx \quad ; \quad \int_0^1 x \ln(1+x)\,dx.$$

3°) On pose:

$$F_1(a) = \int_0^1 f_a^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f_a(x)\,dx\right)^2.$$

.../...

a) Expliciter $F_1(a)$.
b) Déterminer le minimum de F_1 ainsi que la valeur de a qui le réalise.

4°) Déduire des résultats précédents le minimum K_1 de l'expression $N_1(a, b)$, ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

B] On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale:

$$N_2(a, b) = \max_{0 \le x \le 1} |\ln(1 + x) - ax - b|.$$

1°) Pour toute application continue $g: I \to R$, on note:

$$M(g) = \max_{0 \le x \le 1} g(x) \quad ; \quad m(g) = \min_{0 \le x \le 1} g(x) \quad ; \quad \mu(g) = \max_{0 \le x \le 1} |g(x)|.$$

En utilisant des réels x_1, x_2 de I tels que $g(x_1) = M(g)$, $g(x_2) = m(g)$ (on en justifiera l'existence), établir que, pour tout nombre réel b, on a:

$$\begin{cases} \mu(g - b) = \dfrac{M(g) - m(g)}{2} & \text{si } b = \dfrac{M(g) + m(g)}{2}. \\ \mu(g - b) > \dfrac{M(g) - m(g)}{2} & \text{si } b \neq \dfrac{M(g) + m(g)}{2}. \end{cases}$$

2°) a) Prouver que la dérivée de la fonction f_a s'annule sur I si et seulement si le réel a appartient à un intervalle $[\alpha, \beta]$ que l'on précisera.
b) En déduire les variations de la fonction f_a sur I en distinguant les trois cas: $a < \alpha$, $\alpha \le a \le \beta$, $a > \beta$.

3°) On pose:

$$F_2(a) = M(f_a) - m(f_a).$$

a) Expliciter l'expression de $F_2(a)$ en fonction des valeurs de a, et tracer la courbe représentative de F_2 (en prenant pour unité 5cm sur l'axe Ox, 10cm sur l'axe Oy). Etudier la continuité et la dérivabilité de F_2.
b) Déterminer le minimum de F_2 ainsi que la valeur qui le réalise.

4°) Déduire des résultats précédents le minimum K_2 de l'expression $N_2(a, b)$, ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

5°) Vérifier l'inégalité suivante:

$$K_1 \le K_2^2.$$

Etait-elle prévisible?

****
****
**

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail